Μαθηματικό Τμήμα, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Συναρτησιακή Ανάλυση I, 27/1/2017 Διδάσκων: Α. Τόλιας

Θέμα 1.
✓ (α) Έστω X, Y χώροι με νόρμα ώστε ο Y να είναι χώρος Banach. Να δείξετε ότι ο χώρος $\mathcal{B}(X,Y)$ των φραγμένων γραμμικών τελεστών από τον X στον Y είναι επίσης χώρος Banach.
(β) Αν $T : \ell^1(\mathbb{N}) \to \ell^1(N)$ με

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (\frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \frac{1}{4}x_4, \ldots)$$

να δειχθεί ότι ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και να υπολογιστεί η νόρμα του T^n για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Θέμα 2. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο $[0,1]$.
Ορίζουμε $T : C[0,1] \to \ell^\infty(\mathbb{N})$ με τύπο

$$T(f) = \Big(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots\Big).$$

(α) Να δείξετε ότι ο T είναι καλά ορισμένος, φραγμένος γραμμικός τελεστής και να υπολογίσετε τη νόρμα του T.
(β) Να εξηγήσετε γιατί ο τελεστής T δεν είναι επί. Να δείξετε ότι ο T είναι 1–1 αν και μόνο αν το σύνολο $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στο $[0,1]$.

✓ **Θέμα 3.** Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής.
(α) Να ορίσετε τον τελεστή T^*, και να δείξετε ότι είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής με $\|T^*\| = \|T\|$.
(β) Να δείξετε ότι ο T^* είναι 1–1 αν και μόνο αν ο $T(X)$ είναι πυκνός υπόχωρος του Y.

✓ **Θέμα 4.** Έστω H ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο.
(α) Δείξτε ότι $| < x, y > | \leq \sqrt{< x, x >} \cdot \sqrt{< y, y >}$ για κάθε $x, y \in H$.
(β) Αν $x \in H$ και ορίσουμε $f_x : H \to \mathbb{R}$ με $f_x(y) =< x, y >$, δείξτε ότι $f_x \in H^*$ με $\|f_x\| = \|x\|$.
(γ) Αν ο H είναι χώρος Hilbert, F είναι κλειστό και κυρτό υποσύνολο του H και $x \in H$, δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $y \in F$ ώστε $\|x - y\| = d(x, F)$.

Θέμα 5. (α) Για κάθε $x \in \ell^2(\mathbb{N})$ ορίζουμε $\|x\| = \|x\|_2 + \|x\|_\infty$.
Να δειχθεί ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα στον $\ell^2(\mathbb{N})$, ισοδύναμη της $\|\cdot\|_2$, αλλά η νόρμα $\|\cdot\|$ δεν προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο.
(β) Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο H και $x \in H$. Δείξτε ότι $x_n \to x$ αν και μόνο αν $\|x_n\| \to \|x\|$ και $< x_n, y > \to < x, y >$ για κάθε $y \in H$.
(γ) Έστω H χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\varepsilon > 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in H$ με $\|x\| = \|y\| = 1$ και $\|x - y\| \geq \delta$ τότε $\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \varepsilon$.

✓ **Θέμα 6.** Έστω X, Y δύο χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός ώστε για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X με $x_n \to 0$ και κάθε $f \in Y^*$ να ισχύει $f(Tx_n) \to 0$. Δείξτε, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος, ότι ο T είναι φραγμένος.

Καλή Επιτυχία!